ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԱԼԵՔՍԱՆԴՐ ՌՈՒԲԵՆԻ ՀԱԿՈԲՅԱՆ

ԱՆՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ՏԻՐՈՒՅԹՆԵՐԻ ՎՐԱ ՄՈՆՈՏՈՆ ՈՉ ԳԾԱՅՆՈՒԹՅԱՄԲ ՈՐՈՇ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Ա.01.02. - «Դիֆերենցիալ հավասարումներ, Մաթեմատիկական ֆիզիկա»
մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ 2024

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

АКОПЯН АЛЕКСАНДР РУБЕНОВИЧ

НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С МОНОТОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ НА НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.01.02 - "Дифференциальные уравнения и Математическая физика"

Ереван 2024

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Հայ-Ռուսական (Սլավոնական) Համալսարանի գիտական խորհրդի հ. 6 նիստում (20.11.2023թ):

Գիտական ղեկավար` - ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Խ. Ա. Խաչատրյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ` - ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Ա. Գ. Սերգեև

- ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ Գ. Ս. Հակոբյան

Առաջատար կազմակերպություն - Խ. Աբովյանի անվան Հայկական Պետական Մանկավարժական Համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2024թ. մարտի 21-ին ժամը 15:00-ին, Երևանի Պետական Համալսարանի 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում:
Հասցե` ք.Երևան, 3750025, փ. Ալեք Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ Ե Պ Հ գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2024թ. փետրվարի 8-ին:

050 մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար,
ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր` Կ. Լ. Ավետիսյան

Тема диссертации утверждена на заседании ученого совета Российско-Армянского(Славянского) Университета (№ 6, 20.11.2023г).

Научный руководитель - доктор физ.-мат. наук, профессор Х.А. Хачатрян

Официальные оппоненты - доктор физ.-мат. наук, профессор А. Г. Сергеев

- кандидат физ.-мат. наук, доцент Г. С. Акобян

Ведущая организация –Армянский Государственный Педагогический Университет имени Х. Абовяна

Защита диссертации состоится 21-го марта 2024г. в 15:00 часов на заседании специализированного совета 050 при Ереванском государственном университете.

Адрес: г. Ереван, 3750025, ул. Алек Манкуяна 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕрГУ.

Автореферат разослан 8-го февраля 2024г.

Ученый секретарь

специализированного совета,

доктор физ.-мат. наук, профессор К. Л. Аветисян

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с некомпактными операторами в настоящее время является одной из самых передовых. Интерес к ним привлекли, в частности, важные приложения в различных отраслях современного естествознания. Уравнения такого характера возникают в газовой динамике (в кинетической теории газов и плазмы в рамках модифицированной модели Бхатнагара-Гросса-Крука), в теории переноса излучения в неоднородных средах, в математической теории распространения эпидемических заболеваний в рамках модели Аткинсона-Ройтера и Дикмана-Каппера, в динамической теории p-адических открытых, замкнутых и открыто-замкнутых струн для скалярного поля тахионов, в математической теории распределения национального дохода в рамках нелинейной модели Дж. Саргана и т.д. (см. [2], [3], [5], [11], [12], [20], [21], [23], [28], [29]). Исторически первые нелинейные интегральные уравнения исследованы в 20–30 годах прошлого века в работах П. Урысона и А. Гаммерштейна. Затем научные школы М. Красносельского и Ф. Браудера начали систематические исследования этих уравнений. В работах [7], [8] и [9] были найдены достаточные условия полной непрерывности нелинейных операторов Гаммерштейна и Урысона в различных банаховых пространствах. Используя эти результаты и классические принципы существования неподвижных точек, такие как теоремы Брауэра, Шаудера и Маркова-Какутани, в работах [7], [9], [22] были разработаны теории разрешимости указанных уравнений на ограниченных множествах. В дальнейшем были найдены достаточные условия существования и единственности неподвижной точки для нелинейных интегральных операторов Гаммерштейна в рефлексивных банаховых пространствах (иногда без условия полной непрерывности соответствующего оператора). Для этого использовалась известная теорема Браудера-Минти о сюръективности коэрцитивных монотонных операторов.

В последнее время возрос интерес к нелинейным интегральным уравнениям на неограниченных множествах, где операторы действуют в нерефлексивных банаховых пространствах и не являются компактными. Интерес к таким уравнениям обусловлен в первую очередь с их важным значением в указанных выше приложениях. Такие уравнения требуют отдельного изучения в зависимости от свойств ядра и нелинейности. Ниже представлен краткий исторический обзор результатов исследований в этой области.

Первые исследования данных классов уравнений были начаты с работы О. Дикмана (см. [23]), где было изучено нелинейное интегральное уравнение типа свертки на числовой прямой. В этой работе было доказано существование монотонного ограниченного положительного решения при достаточно строгих ограничениях на ядро и нелинейность уравнения. Позже этот результат был усилен в работе Х. А. Хачатряна и А. С. Петросян (см. [17]) при более слабых условиях на нелинейности для интегральных уравнений типа Гаммерштейна-Стилтьеса на прямой. Кроме того, в работе [17] была доказана единственность решения в определенном конусном отрезке.

В 1997 году в работе Л. Г. Арабаджяна (см. [1]) была доказана конструктивная теорема о существовании положительных решений для квазилинейных интегральных уравнений сверточного типа на полуоси. В 2006 году Н. Б. Енгибаряном была доказана новая теорема о неподвижной точке монотонного оператора в критическом случае, и этот результат был применен в решении одного специального класса нелинейных интегральных уравнений урысоновского типа (см. [6]). Аналогичные результаты были получены для нелинейных интегральных уравнений гаммерштейновского типа на полуоси и на всей прямой в работах Х. А. Хачатряна и его соавторов (см. [13]-[19]). Использовался метод, основанный на теореме М. Красносельского о неподвижных точках монотонных операторов, оставляющих инвариантными соответствующие конусные отрезки в правильных конусах. Для этого использовались рассуждения о существовании прямых и обратных элементов у неотрицательных операторов с единичным спектральным радиусом. В случае сильно миниэдрального конуса в вещественном банаховом пространстве применялась теорема Биркхофа-Тарского о неподвижной точке монотонного оператора. Однако следует отметить, что теорема Биркхофа-Тарского не носит конструктивный характер.

В течение последних 30-и лет в связи с активным развитием p-адической математической физики появился значительный интерес к исследованию интегральных уравнений сверточного типа со степенными нелинейностями. Первоначальные результаты, касающиеся ядер с гауссовским распределением, были получены В. С. Владимировым и его научной школой в работах [2], [3]. В этих работах были доказаны существование нетривиальных и ограниченных решений, а также исследованы некоторые свойства построенных решений (такие как монотонность, гладкость, асимптотическое поведение и т.д.). Следует также отметить, что посредством этих решений указанных классов уравнений можно исследовать специальные краевые задачи для уравнения теплопроводности (см. [2]).

Тем не менее, вопрос о единственности решения оставался неразрешенным на протяжении длительного времени. В недавних работах Х. А. Хачатряна была решена проблема единственности решения для более общих интегральных уравнений сверточного типа с произвольным положительным суммируемым ограниченным четным ядром и общей выпуклой монотонной нелинейностью (см. [10], [12], [14], [16], [18], [19], [27]). В этих работах были также представлены конструктивные теоремы о существовании нетривиальных непрерывных монотонных и ограниченных решений, а также были исследованы обычные и интегральные асимптотики построенных решений на бесконечности. Полученные результаты были распространены на соответствующие дискретные аналоги и системы нелинейных интегральных уравнений в работах [24]-[26].

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию вопросов существования, единственности, асимптотического поведения, а также отсутствия нетривиальных ограниченных непрерывных решений для новых классов нелинейных скалярных и векторных интегральных уравнений с некомпактными операторами. В диссертационной работе изучены также дискретные аналоги указанных нелинейных уравнений в пространстве ограниченных последовательностей.

Исходя из вышеизложенных фактов можно считать, что тематика диссертационной работы является весьма актуальной.

Цель работы. Основной целью настоящей диссертации является:

- Построение неотрицательных нетривиальных и ограниченных решений для одного класса нелинейных интегральных уравнений со стохастическим ядром на полуоси.

- Построение однопараметрического семейства нетривиальных непрерывных и ограниченных решений для некоторых систем квазилинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна-Вольтерра.

- Доказательство конструктивной теоремы существования для систем интегральных уравнений Гаммерштейна-Вольтерра с сильной нелинейностью.

- Доказательство теорем существования и единственности для интегральных уравнений на всей прямой с выпуклой и монотонной нелинейностью.

- Изучение некоторых качественных свойств построенных решений.

- Исследование отсутствия нетривиальных ограниченных решений для соответствующих дискретных аналогов указанных уравнений.

Методы исследования. В работе использовались методы теории нелинейных монотонных операторов действующих в нерефлексивных банаховых пространствах, специальные итерационные методы, методы теории интегральных уравнений Винера-Хопфа, методы теории матриц, методы теории функций вещественной переменной.

Научная новизна. Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми, обоснованы строгими математическими доказательствами.

Практическая значимость. Результаты, полученные в диссертационной работе, имеют теоретический и практический интерес. Эти результаты могут быть использованы в конкретных задачах математический эпидемиологии, в теории p-адических струн и в кинетической теории газов.

Основные положения, выносимые на защиту. На основе проведенных исследований автором выносятся на защиту следующие положения:

- Доказана конструктивная теорема существования неотрицательного нетривиального и ограниченного решения для нового класса нелинейных интегральных уравнений гаммерштейновского типа на полуоси. Исследована также интегральная асимптотика решения на бесконечности.

- Для одной системы квазилинейных интегральных уравнений Гаммерштейна-Вольтерра построено однопараметрическое семейство измеримых ограниченных нетривиальных решений. Доказано существование предела на бесконечности построенных решений, описаны множество параметров и монотонная зависимость решений от параметра.

- Для систем интегральных уравнений Гаммерштейна-Вольтерра с сильной нелинейностью доказана конструктивная теорема существования ограниченного положительного решения. Кроме того, исследована обычная асимптотика построенного решения на бесконечности.

- Доказаны теоремы существования, отсутствия и единственности нетривиального ограниченного решения для одного класса нелинейных интегральных уравнений на всей прямой и соответствующих частных дискретных аналогов указанных уравнений.

Апробация полученных результатов. Основные результаты диссертации докладывались на международной конференции по математическому анализу и дифференциальным уравнениям (г. Цахкадзор, 2022г), на годичной конференции Российско-Армянского Университета (РАУ, 2023г.), на семинарах отдела методов математической физики Института Математики НАН Армении, на семинаре кафедры теории функций и дифференциальных уравнений Ереванского Государственного Университета.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 4 печатных работах в рецензируемых журналах, входящих в перечень КВОН и в одном сборнике тезисов международной конференции.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, содержащих 12 параграфов, заключения и списка цитируемой литературы, включающего в себе 117 наименований. Общий объем диссертации составляет 89 страниц.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов и изложено краткое содержание диссертации.

Первая глава Первая глава диссертации посвящена изучению следующего класса нелинейных интегральных уравнений с консервативным ядром на положительной полупрямой:

$$f(x) = \lambda(x) \int_0^\infty K(y) G(f(r(x,y)))dy, \ x \in \mathbb{R}^+ := [0, +\infty) \tag{1}$$

относительно искомой неотрицательной и ограниченной функции $f(x)$. В вышеуказанном уравнении функции λ и K измеримы на множестве $\mathbb{R}^+$ и удовлетворяют следующим условиям:

$a)$ $0 \leq \lambda(x) \leq 1, \lambda(x) \not\equiv 1, x \in \mathbb{R}^+, \lambda(x) \uparrow$ на $\mathbb{R}^+, x(1-\lambda(x)) \in L_1(\mathbb{R}^+)$,

$b)$ $K(x) > 0, x \in \mathbb{R}^+, K \in L_1(\mathbb{R}^+), \int_0^\infty K(x)dx = 1$,

где $L_1(\mathbb{R}^+)$ — пространство суммируемых функций на множестве $\mathbb{R}^+$.

Нелинейность G обладает следующими свойствами:

1) существует число $\eta > 0$ такое, что $G \uparrow$ на отрезке $[0, \eta]$,

2) $G(u) \geq u,\ u \in [0, \eta],\ G(\eta) = \eta$,

3) $G(0) = 0,\ G \in C(\mathbb{R}^+)$,
где $C(\mathbb{R}^+)$ — пространство непрерывных функций на множестве $\mathbb{R}^+$.

В уравнении (1) $r(x, y)$ — непрерывная функция на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, принимающая неотрицательные значения и удовлетворяющая следующим ограничениям:

I) при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^+$ функция $r(x, y) \uparrow$ по y на множестве $\mathbb{R}^+$ и при каждом фиксированном $y \in \mathbb{R}^+$ функция $r(x, y) \uparrow$ по x на $\mathbb{R}^+$,

II) $r(x, 0) \geq x,\ x \in \mathbb{R}^+$ и существует число $\delta > 0$ такое, что

$$r(x, \delta) \geq x + \delta,\ x \in \mathbb{R}^+.$$

В различных частных случаях данный класс уравнений имеет приложения в конкретных разделах математической физики. В частности, такие уравнения встречаются в теории переноса излучения, в кинетической теории газов, в кинетической теории плазмы и в p-адической теории открыто-замкнутой струны (см. [2], [3], [5], [20]). Сочетание специальных итерационных методов с методами теории монотонных операторов, действующих на определенных конусных отрезках, позволяет доказать конструктивную теорему существования неотрицательного нетривиального ограниченного решения, имеющего конечный предел в бесконечности.

Сперва наряду с уравнением (1) рассматривается следующее линейное вспомогательное интегральное уравнение на полуоси:

$$\varphi(x) = 1 - \lambda(x) + \int_0^\infty K(y)\varphi(r(x, y))dy,\ x \in \mathbb{R}^+ \tag{2}$$

относительно искомой измеримой функции $\varphi(x)$. Здесь функции λ, K и r удовлетворяют условиям a), b) и I), II) соответственно.

Доказывается следующая

Лемма 1.1. *При условиях* $a), b)$ *и* $I), II)$ *линейное интегральное уравнение* (2) *обладает неотрицательным суммируемым на множестве* $\mathbb{R}^+$ *решением* $\varphi(x)$, *кроме того* $\varphi(x) \downarrow$ *на* $\mathbb{R}^+$ *и следующие оценки имеют место:*

$$\varphi(x) \geq 1 - \lambda(x), \ x \in \mathbb{R}^+, \tag{3}$$

$$0 < \int\limits_0^\infty \varphi(x)dx \leq \left(\int\limits_\delta^\infty K(y)dy \right)^{-1} \cdot \int\limits_0^\infty \left(\frac{2x}{\delta} + 1 \right) (1 - \lambda(x))dx. \tag{4}$$

Более того, если дополнительно $K \in M(\mathbb{R}^+)$ *и* $r(0, y) \geq y$, $y \in \mathbb{R}^+$, *то* $\varphi \in M(\mathbb{R}^+)$.

Замечание 1.1. *Проводя аналогичные рассуждения, как в ходе доказательства сформированной леммы, можно убедиться, что при условиях a), b) и I), II), если*

$$\int\limits_0^\infty x^p (1 - \lambda(x))dx < +\infty$$

для некоторого натурального $p > 1$, *то*

$$\int\limits_0^\infty x^{p-1} \varphi(x)dx < +\infty.$$

Замечание 1.2. *Следует отметить, что условие b) на самом деле является существенным, ибо если, например, предполагать, что* $K(x) \geq 0$ *и* $suppK = \left[\frac{\delta}{2}, +\infty\right)$, *то выбирая*

$$r(x, y) = \begin{cases} x, 0 \leq y < \frac{\delta}{2}, \\ \\ x + 2\left(y - \frac{\delta}{2}\right), \frac{\delta}{2} \leq y, \end{cases}$$

уравнение (2) *не будет обладать суммируемым монотонно убывающим и неотрицательным решением,* $\lambda(x) \not\equiv 1$ (*об этом подробнее см. в главе 1*).

Используя лемму 1.1 и некоторые априорные оценки для вогнутых (выпуклых вверх) функций удается доказать следующий основной результат первой главы:

Теорема 1.1. *При условиях a), b), 1)-3) и I), II) нелинейное интегральное уравнение* (1) *обладает неотрицательным нетривиальным и* *ограниченным на $\mathbb{R}^+$ решением $f(x)$, причем существует*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \eta \text{ и } \eta - f \in L_1(\mathbb{R}^+).$$

Замечание 1.3. *Так как по условию 3) $G(0) = 0$, уравнение (1) обладает тривиальным (нулевым) решением: $f(x) \equiv 0$ на $\mathbb{R}^+$. Из вышеприведенной теоремы следует существование второго решения уравнения, причем являющегося нетривиальным и ограниченным.*

Замечание 1.4. *Отметим также, что в общем случае в пространстве ограниченных на $\mathbb{R}^+$ функций единственность решения уравнения (1) не имеет место. В качестве подтверждения приведем следующий интересный пример уравнения с нелинейностью $G(u) = u + sin^2 u$, $u \in \mathbb{R}^+$, для которой выполняются все условия 1)–3), в чем несложно убедиться. Однако отображение $y = G(u)$ обладает счетным числом неподвижных точек $\eta_k = \pi k$, $k = 0, 1, 2, ...$, и на каждом из отрезков $[0, \eta_k]$, $k = 1, 2, 3, ...$ функция $G(u)$ удовлетворяет условиям 1), 2). Согласно теореме 1.1 эти неподвижные точки порождают однопараметрическое семейство решений $\left\{f^{(k)}(x)\right\}_{k=0}^{\infty}$ для уравнения (1), причем*

$$\lim_{x\to+\infty} f^{(k)}(x) = \pi k,\ \pi k - f^{(k)} \in L_1(\mathbb{R}^+),\ k = 0, 1, 2, \dots\ .$$

Таким образом, данный контрпример подсказывает, что в общем случае нарушается единственность решения уравнения (1) в пространстве ограниченных на $\mathbb{R}^+$ функций.

Вторая глава Вторая глава диссертации посвящена изучению и решению некоторых систем нелинейных интегральных уравнений с монотонным интегральным оператором типа Гаммерштейна-Вольтерра. Указанные системы, при конкретных частных представлениях матричных ядер и нелинейностей, имеют приложения в различных областях математической физики и математической биологии (см. [5], [20], [23], [29]).

В указанной главе исследуются следующие системы квазилинейных и существенно нелинейных интегральных уравнений с монотонными операторами типа Гаммерштейна-Вольтерра на всей прямой $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$:

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{x} K_{ij}(x,t)\{f_j(t) + \omega_{ij}(t, f_j(t))\}dt,\ i = 1, ..., n,\ x \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

$$\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{x} K_{ij}(x,t)\{G_j(\varphi_j(t)) + \omega_{ij}(t, \varphi_j(t))\}dt,\ i = 1, ..., n,\ x \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

относительно искомых измеримых на множестве $\mathbb{R}$ вектор-функций $f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))^T$ и $\varphi(x) = (\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x))^T$ соответственно (T — знак транспонирования). В системах (5) и (6) матричное ядро $K(x,t) = (K_{ij}(x,t))_{i,j=1}^{n\times n}$ удовлетворяет следующим ограничениям:

$a)$ $K_{ij}(x,t) > 0$, $(x,t) \in \mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $K_{ij} \in L_\infty(\mathbb{R}^2)$, $i,j = 1,2,...,n$,

где $L_\infty(\mathbb{R}^2)$ — пространство существенно ограниченных функций на $\mathbb{R}^2$,

$b)$ существует такая симметричная матрица $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n\times n}$ с положительными элементами a_{ij} и с единичным спектральным радиусом, что

$b_1)$
$$\gamma_{ij}(x) := a_{ij} - \int_{-\infty}^{x} K_{ij}(x,t)dt \geq 0,\ \gamma_{ij}(x) \not\equiv 0,\ x \in \mathbb{R},$$
$$\lim_{x\to-\infty} \gamma_{ij}(x) = 0,\ i,j = 1,2,...,n,$$

$b_2)$
$$\int_{t}^{\infty} K_{ij}(x,t)dx \leq a_{ij},\ t \in \mathbb{R}, i,j = 1,2,...,n,$$

$b_3)$
$$\int_{-\infty}^{0} (-x)\gamma_{ij}(x)dx < +\infty,\ i,j = 1,2,...,n,$$

$c)$ существует символ $\delta_0 > 0$ такой, что

$$\varepsilon_{ij} := \inf_{x\in(-\infty,0]} \int_{\delta_0}^{\infty} K_{ij}(x+y,x)dy > 0,\ i,j = 1,2,...,n.$$

Из свойств матрицы A, в силу теоремы Перрона (см. [4]), следует, что существует вектор $\eta = (\eta_1, ..., \eta_n)^T$ с положительными координатами η_i, $i = 1,2,...,n$, такой, что
$$A\eta = \eta. \tag{7}$$

Нелинейности $\{G_j(u)\}_{j=1}^{n}$ и $\{\omega_{ij}(t,u)\}_{i,j=1}^{n\times n}$ удовлетворяют следующим условиям:

I) $G_j \in C(\mathbb{R}^+)$ выпуклы вверх на множестве $\mathbb{R}^+$, $G_j(0) = 0$, $j = 1,2,...,n$,

II) $G_j(u)$ монотонно возрастают по u на множестве $\mathbb{R}^+$, $j = 1,2,...,n$,

III) существует число $\alpha > 0$ такое, что $G_j(\eta_j^*) = \eta_j^*$, $G_j(u) \geq u$, $u \in [0, \eta_j^*]$, где $\eta_j^* = \alpha\eta_j$, $j = 1, 2, ..., n$,

A) $\omega_{ij}(t, 0) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2, ..., n$,

B) при всяком фиксированном $t \in \mathbb{R}$ функции $\omega_{ij}(t, u)$, $i, j = 1, 2, ..., n$ монотонно возрастают по u на множестве $\mathbb{R}^+$,

C) существуют

$$\beta_{ij}(t) := \sup_{u \in \mathbb{R}^+} (\omega_{ij}(t, u)), \ i, j = 1, 2, ..., n,$$

причем функции $\beta_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, ..., n$ монотонно не убывают по t на множестве $\mathbb{R}$ и удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}(x) (a_{ij} - \gamma_{ij}(x)) \leq \sum_{j=1}^{n} \eta_j \gamma_{ij}(x), \ x \in \mathbb{R}, \ i = 1, 2, ..., n, \tag{8}$$

D) $\{\omega_{ij}(t, u)\}_{i,j=1}^{n \times n}$ удовлетворяют условию Каратеодори по аргументу u на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, то есть при каждом фиксированном $u \in \mathbb{R}^+$ функции $\{\omega_{ij}(t, u)\}_{i,j=1}^{n \times n}$ измеримы по t на $\mathbb{R}$, и почти при всех $t \in \mathbb{R}$ эти функции непрерывны по u на множестве $\mathbb{R}^+$.

Изучение систем нелинейных интегральных уравнений (НИУ) (5) и (6), кроме чисто математического интереса, имеет также важный интерес в различных прикладных задачах математической физики и математической биологии. В частности, при конкретных представлениях матричных ядер $\{K_{ij}(x, t)\}_{i,j=1}^{n \times n}$ и нелинейностей $\{G_j(u)\}_{j=1}^{n}$, $\{\omega_{ij}(t, u)\}_{i,j=1}^{n \times n}$ такие системы НИУ встречаются в кинетической теории газов, в теории переноса излучения в марковских процессах и в математической теории пространственно-временного распространения эпидемии (см. [5], [20], [23], [29]).

В том случае, когда ядра $\{K_{ij}(x, t)\}_{i,j=1}^{n \times n}$ зависят от разности своих аргументов и удовлетворяют условию закритичности (спектральный радиус матрицы A больше единицы) при определенных ограничениях на функции $\{\omega_{ij}(t, u)\}_{i,j=1}^{n \times n}$ система (5) на $(-\infty, 0]$ (и соответствующая система НИУ на $\mathbb{R}^+$, интегрирование в правой части которой проводится от $x \geq 0$ до $+\infty$) достаточно подробно исследовалась в работе [24]. В указанной главе построено однопараметрическое семейство положительных суммируемых и ограниченных на $(-\infty, 0]$ (на $\mathbb{R}^+$) решений и описано множество соответствующих параметров.

Следует также отметить, что при

$$K_{ij}(x, t) = K_{ij}(x - t), \ (x, t) \in \mathbb{R}^2, i, j = 1, 2, ..., n$$

соответствующие системы НИУ сверточного типа (т.е. когда интегрирование в правых частях (5) и (6) проводится от $-\infty$ до $+\infty$) были изучены в работе [25].

Основными результатами, приведенными во второй главе, являются нижеприведенные две теоремы.

Теорема 2.1. *При условиях a) - c) и A) - D) система НИУ* (5) *обладает однопараметрическим семейством покомпонентно неотрицательных (нетривиальных) и ограниченных решений* $f^{\gamma}(x) = (f_1^{\gamma}(x), ..., f_n^{\gamma}(x))^T$, $\gamma \in (0, +\infty)$, *причем существуют* $\lim\limits_{x \to -\infty} f_j^{\gamma}(x) = \eta_j \gamma$ *и* $\eta_j \gamma - f_j^{\gamma} \in L_1(-\infty, 0)$, $j = 1, 2, ..., n$, $\gamma \in (0, +\infty)$.

Теорема 2.2. *При условиях a) - c), I) - III) и A) - D) система НИУ* (6) *имеет покомпонентно неотрицательное (нетривиальное) и ограниченное на* $\mathbb{R}$ *решение* $\varphi(x) = (\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x))^T$, *причем существуют* $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi_j(x) = \eta_j^*$ *и* $\eta_j^* - \varphi_j \in L_1(-\infty, 0)$, $j = 1, 2, ..., n$.

В конце главы приводятся конкретные примеры матричных ядер $\{K_{ij}(x,t)\}_{i,j=1}^{n \times n}$ и нелинейностей $\{G_j(u)\}_{j=1}^{n}$, $\{\omega_{ij}(t,u)\}_{i,j=1}^{n \times n}$, удовлетворяющие всем условиям теорем 2.1 и 2.2. Отметим, что часть этих примеров имеют прикладной характер, они возникают в конкретных задачах математической физики и биологии (см. [5], [20], [23], [29]).

Третья глава диссертации состоит из двух частей.

В первой части рассматривается следующий класс НИУ на всей числовой оси:

$$Q(f(x)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x,t) f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R} \tag{9}$$

относительно искомой измеримой неотрицательной и ограниченной на $\mathbb{R}$ функции $f(x)$. В уравнении (9) нелинейность $Q \in C(\mathbb{R})$ удовлетворяет следующим условиям:

- $q_1)$ $Q(-x) = -Q(x)$, $x \in \mathbb{R}$ и $y = Q(u) \uparrow$ на $\mathbb{R}$,
- $q_2)$ существует $Q''(u) > 0$, при $u > 0$,
- $q_3)$ существует число $\eta > 0$ такое, что $Q(\eta) = \eta$.

Ядро $K(x,t)$ определено на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и обладает следующими свойствами:

- $k_1)$ $K(x,t) > 0$, $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $K \in C_M(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, где $C_M(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ — пространство непрерывных и ограниченных функций на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$k_2)$ $K(x,t)=K(-x,-t)=K(t,x), \quad (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$,

$\gamma(x):=1-\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(x,t)dt\in L_1(\mathbb{R})$, причем $\gamma(x)\geq 0$, $x\in\mathbb{R}$,

$k_3)$ существует $\varkappa:=\sup\limits_{r\geq 0}\int\limits_0^r\int\limits_r^\infty K(x,t)dtdx<+\infty$,

$k_4)$ $\mu:=\int\limits_{-\infty}^0\int\limits_0^\infty K(x,t)dtdx<+\infty$.

При различных частных представлениях ядра K и нелинейности Q, уравнение (9) имеет приложения во многих областях естествознания. В частности, когда ядро K зависит от разности своих аргументов, а $Q^{-1}(u)=u-\omega(u)$, $\omega\downarrow$ на $[A,+\infty)$, $\omega\in L_1(\mathbb{R}^+)\cap C_M(\mathbb{R}^+)$, $A\geq 0$ ($Q^{-1}(u)$ — обратная функция к функции $Q(u)$), уравнение (9) возникает в теории переноса излучения, в спектральных линиях (см. [1], [5]). В случае, когда ядро K из себя представляет гауссовское нормальное распределение следующего вида: $K(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-t)^2}$, а $Q(u)=u^p$, $p>2$ — нечетное число, уравнение (9) имеет непосредственное применение в динамической теории p-адических открыто-замкнутых струн для скалярного поля тахионов (см. [2], [3], [16]). В том случае, когда $K(x,t)=\lambda(x)\overset{\circ}{K}(x-t)$, $K_0(\tau)>0, K_0(-\tau)=K_0(\tau)$, $K_0\downarrow\mathbb{R}^+$, $\int\limits_0^\infty\overset{\circ}{K}(\tau)d\tau=\frac{1}{2}$, $\int\limits_0^\infty t\overset{\circ}{K}(t)dt<+\infty$, $0\leq\lambda(x)\leq 1$, $\lambda(x)\not\equiv 1$, $x\in\mathbb{R}$, $1-\lambda\in L_1^0(\mathbb{R})$, а $Q^{-1}(u)=\gamma(1-e^{-u}), \gamma>1$ — числовой параметр, уравнение (9) имеет приложение в математической теории географического распространения пандемии (см. [11], [29]).

Следующие 3 леммы являются ключевыми для доказательства основных результатов и одновременно представляют самостоятельный интерес:

Лемма 3.1. *Пусть выполняются условия $q_1),q_2),q_3),k_1)$ и $k_2)$. Тогда любое неотрицательное и ограниченное на $\mathbb{R}$ решение f уравнения (9) является непрерывной функцией на множестве $\mathbb{R}$ и удовлетворяет неравенству $f(x)\leq\eta$, $x\in\mathbb{R}$.*

Лемма 3.2. *При условиях $q_1)-q_3),k_1)-k_4)$ любое неотрицательное и ограниченное решение f уравнения (9) удовлетворяет следующему включению: $f-Q(f)\in L_1(\mathbb{R})$.*

Лемма 3.3. *При условиях леммы 3.1 для любого неотрицательного и ограниченного на $\mathbb{R}$ решения $f(x)$ уравнения (9) справедливо неравенство*

$$0\leq f(x)-Q(f(x))\leq Q'(\eta)(\eta-f(x)),\ x\in\mathbb{R}.$$

Основными результатами первой части третьей главы являются следующие три теоремы:

Теорема 3.1. *При условиях* $q_1) - q_3), k_1) - k_4)$, *если* $\gamma(x) \equiv 0$, *то уравнение* (9) *в классе неотрицательных и ограниченных на* $\mathbb{R}$ *функций, кроме тривиальных решений* $f(x) \equiv 0$ *и* $f(x) \equiv \eta$, *других решений не имеет.*

Теорема 3.2. *Пусть существует число* $\varepsilon_0 \in (0,1)$ *такое, что* $\gamma(x) \leq 1 - \varepsilon_0$, $\gamma(x) \not\equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$. *Тогда, если уравнение* $Q(u) = \varepsilon_0 u$ *имеет положительное решение, то при условиях* $q_1) - q_3)$ *и* $k_1), k_2)$ *уравнение* (9) *имеет положительное решение* $f^*(x)$ *на* $\mathbb{R}$ *и* $\eta - f^* \in L_1(\mathbb{R})$.

Теорема 3.3. *Пусть выполняются условия* $q_1) - q_3)$ *и* $k_1) - k_4)$. *Тогда, если существует число* $\varepsilon_0 \in (0,1)$, *для которого уравнение* $Q(u) = \varepsilon_0 u$ *имеет положительное решение и* $\gamma(x) \leq 1 - \varepsilon_0$, $\gamma(x) \not\equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$, *то уравнение* (9) *в классе неотрицательных нетривиальных и ограниченных на* $\mathbb{R}$ *не может иметь более одного решения.*

Вторая часть третьей главы посвящена исследованию следующей системы бесконечных алгебраических уравнений с монотонной нелинейностью:

$$Q(x_n) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_{n-j} x_j,\ n \in \mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}, \tag{10}$$

относительно бесконечного вектора $\mathsf{x} = (..., x_{-1}, x_0, x_1, ...)^T$. В системе (10) последовательность $\{a_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$a_n > 0,\ a_n = a_{-n},\ n \in \mathbb{Z},\ a_n \downarrow \text{ по } n \text{ на } \mathbb{N}, \tag{11}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n = 1,\ \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j \cdot |j| < \infty. \tag{12}$$

Нелинейность Q удовлетворяет условиям $q_1) - q_3)$, а решение уравнения (10) ищется в классе ограниченных последовательностей m:

$$m := \left\{ \mathsf{x} = (..., x_{-1}, x_0, x_1, ...)^T : \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x_n| < +\infty \right\}.$$

Сперва доказываются следующие две леммы, необходимые для доказательства основного результата второй части третьей главы:

Лемма 3.4. *Пусть выполняются условия* (11), (12) *и* $q_1)$ - $q_3)$. *Тогда координаты любого решения* $\mathsf{x} = (..., x_{-1}, x_0, x_1, ...)^T \in m$ *системы* (10) *удовлетворяют следующей двусторонней оценке:*

$$-\eta \leq x_n \leq \eta, n \in \mathbb{Z}.$$

Лемма 3.5. *При условиях леммы* 3.4, *если координаты решения уравнения* (10) $\mathsf{x} = (..., x_{-1}, x_0, x_1, ...)^T \in m$ *удовлетворяют условию* $x_n \geq 0$,

$n \in \mathbb{Z}$, то $x_n \geq Q(x_n), n \in \mathbb{Z}$ и имеет место следующее включение $\mathsf{x} - Q(\mathsf{x}) \in l_1$, то есть

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x_n - Q(x_n)) < \infty.$$

Основным же результатом второй части является следующая

Теорема 3.4. *При условиях* (11) (12) *и* q_1)-q_3) *система* (10) *не обладает неотрицательным, нетривиальным и ограниченным решением.*

В конце главы приводятся конкретные примеры прикладного характера ядра K, функции Q и последовательностей $\{a_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, удовлетворяющие условиям доказанных утверждений.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1*]-[5*].

Автор выражает сердечную благодарность и искреннюю признательность своему научному руководителю д.ф.м. наук, профессору Х. А. Хачатряну за постановку столь широкоприменимых задач и предоставления многочисленных ценных советов в процессе их решения, за его моральную поддержку.

Литература

[1] Л.Г. Арабаджян. Решения одного интегрального уравнения типа Гаммерштейна, Известия НАН Армении, Математика, 1997 г., том 32, № 1, стр. 21–28.

[2] В.С. Владимиров, Я.И. Волович. О нелинейном уравнении динамики в теории p-адической струны, ТМФ, 2004 г., том 138, № 3, стр. 355–368.

[3] В.С. Владимиров. О нелинейном уравнении p-адической открытой струны для скалярного поля, УМН, 2005 г., том 60, № 6(366), стр. 73–88.

[4] Ф.Р. Гантмахер. Теория матриц. 2-е изд., доп., М.: Наука, 1966, - 576 стр.

[5] Н.Б. Енгибарян. Об одной нелинейной задаче переноса излучения. Астрофизика, 1965 г., том 1, № 3, стр. 297–302.

[6] Н.Б. Енгибарян. О неподвижной точке монотонного оператора в критическом случае, Известия РАН Серия Математическая, 2006 г., том 70, № 5, стр. 79–96.

[7] П.П. Забрейко, А.И. Поволоцкий. Квазилинейные операторы и уравнение Гаммерштейна. Матем. заметки, 1972 г., том 12, № 4, стр. 453–464.

[8] П.П. Забрейко, Е.И. Пустыльник. О непрерывности и полной непрерывности нелинейных интегральных операторов в пространствах L_p, УМН, 1964 г., том 19, № 2 (116), стр. 204–205.

[9] М.А. Красносельский. Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматлит, 1962 г., - 394 стр.

[10] А. С. Петросян, Х. А. Хачатрян. О единственности решения одного класса интегральных уравнений с суммарно-разностным ядром и с выпуклой нелинейностью на положительной полупрямой, Матем. заметки, 2023 г., том 113, № 4, стр 529–543.

[11] А.Х. Хачатрян, Х.А. Хачатрян. О разрешимости некоторых нелинейных интегральных уравнений в задачах распространения эпидемии, Математическая физика и приложения, Сборник статей. К 95-летию со дня рождения академика В. С. Владимирова, Тр. МИАН, том 306, 2019 г., стр. 287–303.

[12] А.Х. Хачатрян, Х.А. Хачатрян. О разрешимости одного нелинейного интегрального уравнения динамической теории струны, ТМФ, 2018 г., том 195, № 1, стр. 44–53.

[13] А.Х. Хачатрян, Х.А. Хачатрян. Об одном нелинейном интегральном уравнении типа уравнения Гаммерштейна с некомпактным оператором, Мат. сборник, 2010 г., том 201, № 4, стр. 125–136.

[14] А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян. О нелинейных интегральных уравнениях типа свертки в теории p-адических струн, ТМФ, 2023 г., том 216, № 1, стр 184–200

[15] Х.А. Хачатрян. О разрешимости одной граничной задачи в p-адической теории струн, Тр. ММО, 2018 г., том 79, № 1, стр. 117–132.

[16] Х.А. Хачатрян. О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений в теории p-адической струны, Известия РАН, Серия Математическая, 2018 г., том 82, № 2, стр. 172–193.

[17] Х.А. Хачатрян, А.С. Петросян. О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна-Стилтьеса на всей прямой, Тр. МИАН, 2020 г., 308, стр.253–264.

[18] Х.А. Хачатрян. Существование и единственность решения одной граничной задачи для интегрального уравнения свертки с монотонной нелинейностью, Известия РАН Серия Математическая, 2020 г., том 84, № 4, стр. 198–207.

[19] Х.А. Хачатрян. О разрешимости нелинейных граничных задач для сингулярных интегральных уравнений типа свертки, Труды ММО, 2020 г., том 81, № 1, стр. 3–40.

[20] К. Черчиньяни. Теория и приложения уравнения Больцмана, М.: Мир, 1978 г., - 495 стр.

[21] C. Atkinson, G. E. H. Reuter. Deterministic epidemic waves, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1976, vol. 80, pp. 315–330.

[22] H.Brezis, F.E. Browder. Existance theorems for nonlinear integral equations of Hammerstein type. Bull. Amer. Math. Soc., 1975, vol. 81, № 1, pp. 73–78.

[23] O. Diekmann. Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection, Journal of Mathematical Biology, 1978, vol. 6, № 2, pp. 109–130.

[24] Kh. A. Khachatryan, Ts. E. Terdzhyan, M. F. Broyan. One-parameter family of integrable solutions of a system of nonlinear integral equations of the Hammerstein-Volterra type in the supercritical case. Differential Equations, 2016, vol. 52, № 8, 1036–1042.

[25] Kh. A. Khachatryan, Ts. E. Terdzhyan, M. H. Avetisyan. A one-parameter family of bounded solutions for a system of nonlinear integral equations on the whole line. Journal of Contemp. Math. Analysis, 2018, vol. 53, № 4, 201–211.

[26] Kh. A. Khachatryan, S. M. Andriyan. On the solvability of a class of discrete matrix equations with cubic nonlinearity, Ukrainian Math. Journal, 2020, vol. 71, № 12, pp. 1910—1928.

[27] Kh.A. Khachatryan, H.S. Petrosyan. Integral Equations on the Whole Line with Monotone Nonlinearity and Difference Kernel, Journal of Mathematical Sciences, 2021, vol. 255, № 6, pp. 790–804.

[28] I.D. Sargan. The distribution of wealth, Econometrics, 1957, vol 25, № 4, pp. 568–590.

[29] A. G. Sergeev, Kh. A. Khachatryan. On the solvability of a class of nonlinear integral equations in the problem of a spread of an epidemic. Trans. Moscow Math. Soc., 2019, vol. 80, pp. 95–111.

Список опубликованных работ по теме диссертации

[1*] Kh. A. Khachatryan, A. R. Hakobyan. On nontrivial solvability of one class of nonlinear integral equations with conservative kernel on the positive semi-axis, Proceedings YSU, Phys. Math. Science, 2022, vol. 56, № 1, pp. 7–18.

[2*] Kh.A. Khachatryan, H.S. Petrosyan, A.R. Hakobyan. On Some Systems Of Nonlinear Integral Equations On The Whole Axis With Monotonous Hammerstein-Volterra Type Operators, Eurasian Mathematical Journal, 2023, vol. 14, № 3, pp. 35–53.

[3*] Kh.A. Khachatryan, H.S. Petrosyan, A.R. Hakobyan. On solvability of one class of integral equations on whole line with monotonic and convex nonlinearity, Journal of Mathematical Sciences, 2023, vol. 271, № 5, pp. 610–624.

[4*] А. Р. Акопян. Об отсутствии решения одной системы нелинейных бесконечных алгебраических уравнений с матрицами типа Теплица, Вестник Российско-Армянского Университета (Серия: Физико-Математические и Естественные Науки), 2023, № 1, стр. 7–15.

[5*] А. Р. Акопян, Х. А. Хачатрян. О разрешимости одного класса интегральных уравнений на положительной полупрямой с выпуклой нелинейностью, Сборник тезисов международной конференции по математическому анализу и дифференциальным уравнениям, г. Цахкадзор, 2022 г., стр. 10–11.

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ա. Ռ. Հակոբյան

ԱՆՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ՏԻՐՈՒՅԹՆԵՐԻ ՎՐԱ ՄՈՆՈՏՈՆ ՈՉ ԳԾԱՅՆՈՒԹՅԱՄԲ ՈՐՈՇ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Ատենախոսական աշխատանքը նվիրված է Համերշտեյնի տիպի որոշ դասերի սկալյար և վեկտորական ոչ գծային ինտեգրալ հավասարումների և դրանց դիսկրետ հանգույնների ոչ տրիվիալ, սահմանափակ լուծումների գոյության, միակության, ինչպես նաև դրանց բացակայության հարցերի հետազոտմանը: Ատենախոսական աշխատանքում կատարվել է նաև կառուցված լուծումների որակական հատկությունների վերլուծություն: Մասնավորապես ուսումնասիրվել են լուծումների ասիմպտոտիկ վարքն անվերջությունում, մոնոտոնությունը, անընդհատությունը, ինչպես նաև ինտեգրալ ասիմպտոտիկան: Այդպիսի հավասարումները, բացի ինքնուրույն մաթեմատիկական հետաքրքրությունից, կարևոր են նաև ժամանակակից բնագիտության տարբեր ուղղություններում իրենց ունեցած կիրառությունների տեսանկյունից: Մասնավորապես նման հավասարումներ հանդիպում են p-ադիկ բաց-փակ լարերի տեսությունում, գազերի կինետիկ տեսությունում, անհամասեռ միջավայրերում ճառագայթման տեղափոխման տեսությունում և որոշ մոդելների շրջանակներում վարակիչ հիվանդությունների տարածման մաթեմատիկական տեսությունում: Հատուկ իտերացիոն մեթոդների զուգակցումը ոչ գծային մոնոտոն օպերատորական հավասարումների տեսության մեթոդների և փաթեթի տիպի ինտեգրալ օպերատորների տեսության մեթոդների հետ հնարավորություն են տալիս ապացուցել վերը նշված հավասարումների համար ոչ տրիվիալ, անընդհատ և սահմանափակ լուծումների գոյության և միակության նոր թեորեմներ: Դիտարկվող հավասարումների համապատասխան դիսկրետ հանգույնների համար բերվում են նաև բավարար պայմաններ, որոնք ապահովում են ոչ տրիվիալ և սահմանափակ լուծումների բացակայությունը: Ատենախոսությունում ստացվել են և պաշտպանության են ներկայացվում հետևյալ հիմնական արդյունքները.

- Կիսառանցքի վրա Համերշտեյնի տիպի ոչ գծային ինտեգրալ հավասարումների մի նոր դասի համար ապացուցվել է անվերջությունում վերջավոր սահման ունեցող ոչ բացասական, ոչ տրիվիալ և սահմանափակ լուծման գոյության թեորեմ: Ավելին, գտնվել է լուծման ինտեգրալ ասիմպտոտիկան: Բերվել է նշված հավասարումների մասնավոր օրինակ, որն ունի մեկ պարամետրանոց լուծումների ընտանիք, որտեղ պարամետրերը պատկանում են բնական թվերի բազմությանը:

- Համերշտեյն-Վոլտերայի տիպի մի քվազիգծային ինտեգրալ հավասարումների համակարգի համար կառուցվել է ոչ տրիվիալ, չափելի, սահմանափակ և անվերջությունում վերջավոր սահման ունեցող լուծումների մեկ պարամետրանոց ընտանիք: Նկարագրվել են պարամետրերի բազմությունը և կառուցված լուծումների մոնոտոն կախվածությունը պարամետրից:

- Ուժեղ ոչ գծայնությամբ Համերշտեյն-Վոլտերայի տիպի ինտեգրալ հավասարումների համակարգի համար ապացուցվել է դրական սահմանափակ լուծման գոյության կոնստրուկտիվ թեորեմ: Հետազոտվել է կառուցված լուծման սովորական և ինտեգրալ ասիմպտոտիկան անվերջությունում:

- Ամբողջ առանցքի վրա ուռուցիկ ոչ գծայնությամբ և ստոխաստիկ կորիզով ինտեգրալ հավասարման համար ապացուցվել են ոչ տրիվիալ, սահմանափակ լուծման գոյության և միակության թեորեմներ: Ստացված արդյունքները կիրառվել են տախիոնյան սկալյար դաշտերի համար, p-ադիկ բաց և փակ լարերի դինամիկ տեսությունում:

- Վերը նշված ինտեգրալ հավասարումների համապատասխան դիսկրետ հանգույնների համար ստացվել են բավարար պայմաններ, որոնք ապահովում են սահմանափակ հաջորդականությունների տարածությունում ոչ տրիվիալ, ոչ բացասական լուծումների բացակայությունը:

R E S U M E

Aleksandr Hakobyan

Some integral equations with monotonic nonlinearity in unbounded domains

The thesis work is devoted to the study of existence, uniqueness and absence of bounded solutions for some classes of scalar and vector nonlinear Hammerstein type integral equations and their discrete analogues. The thesis work also contains the analysis of qualitative properties of the constructed solutions. In particular the asymptotic behavior at infinity, monotonicity, continuity and also the integral asymptotics of the solutions were studied.

Besides pure mathematical interest such equations can be applied in many areas of natural sciences. In particular equations of this type arise in the theory of p-adic open-closed strings, in kinetic theory of gases, in radiative transfer theory in inhomogeneous media and in mathematical epidemic spread theory within various models.

Combination of special iteration methods with the theory of nonlinear monotonous operator equations and the theory of convolution type integral equations allows to prove new constructive theorems regarding the existence and uniqueness of non-trivial continuous and bounded solutions for the above mentioned equations. Also, sufficient conditions which ensure the absence of non-trivial bounded solutions for the corresponding discrete analogues of the considered equations are provided.

The basic results obtained in thesis are the following:

- For new class of nonlinear integral Hammerstein type equations on half-line an existence theorem for non-negative non-trivial and bounded solution, which has a finite limit at infinity is proven. Moreover, the integral asymptotic for the constructed solution is found. A special example of such class of equations, which has a one-parameter family of solutions is provided, where the set of the parameters is the set of natural numbers.

- One parameter family of bounded (non-trivial) measurable solutions, which have a finite limit at infinity is constructed for one system of quasilinear Hammerstein-Volterra type integral equations. The set of parameters and the monotonic dependency of the constructed solutions on the parameter are described.

- A constructive existence theorem of a bounded positive solution for a system of Hammerstein-Volterra integral equations with strong nonlinearity is proven. The usual and integral asymptotics of the constructed solution at infinity are also studied.

- Theorems regarding the existence and uniqueness of a non-trivial bounded solution of an integral equation on the entire line with convex nonlinearity and a stochastic kernel are proven. The results obtained are applicable in the dynamic theory of p-adic open-closed strings for the scalar field of tachyons.

- Sufficient conditions have been found, which ensure the absence of non-trivial non-negative solutions in the space of bounded sequences, for the corresponding discrete analogues of the above integral equations.