ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Դպրոցական մաթեմատիկական օլիմպիադա

20 ապրիլի, 2024 թ.

Խնդիր 2.1: Ապացուցել, որ ցանկացած a, b, c թվերի համար, որոնցից յուրաքանչյուրը մեծ է 1-ից, տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը.

$$2\left(\frac{\log_b a}{a+b} + \frac{\log_a c}{c+a} + \frac{\log_c b}{b+c}\right) \geq \frac{9}{a+b+c}:$$

Ապացույց. Նկատելով, որ $\frac{\log_b a}{a+b}, \frac{\log_a c}{c+a}, \frac{\log_c b}{c+b}$ թվերը դրական են ($a, b, c > 1$), կիրառենք միջինների անհավասարությունը՝

$$\frac{\log_b a}{a+b} + \frac{\log_a c}{c+a} + \frac{\log_c b}{b+c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{\log_b a}{a+b} \cdot \frac{\log_a c}{c+a} \cdot \frac{\log_c b}{b+c}} = \frac{3}{\sqrt[3]{(a+b)(c+a)(b+c)}}:$$

Եվս մեկ անգամ կիրառելով միջինների անհավասարությունը՝ կունենանք.

$$\frac{3}{\sqrt[3]{(a+b)(c+a)(b+c)}} = \frac{9}{3\sqrt[3]{(a+b)(c+a)(b+c)}} \geq \frac{9}{2(a+b+c)},$$

Այսպիսով՝

$$\frac{\log_b a}{a+b} + \frac{\log_a c}{c+a} + \frac{\log_c b}{b+c} \geq \frac{9}{2(a+b+c)},$$

որտեղից էլ անմիջապես բխում է պահանջվող անհավասարությունը:

Խնդիր 2.2: Գտնել բոլոր $P(x)$ իրական գործակիցներով բազմանդամները, որոնք բավարարում են

$$(x-1)P(x+1) \equiv (x+2)P(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

նույնությանը:

Լուծում. Նույնության մեջ հաջորդաբար տեղադրելով $x = 1, -2, 0$ արժեքները՝ կստանանք $P(1) = P(-1) = P(0) = 0$: Սրանից հետևում է, որ $P(x)$ բազմանդամը բաժանվում է $x(x-1)(x+1) = x^3 - x$ բազմանդամի վրա՝

$$P(x) = x(x-1)(x+1)Q(x):$$

Տեղադրելով նույնության մեջ՝ կունենանք.

$$(x-1)(x+1)x(x+2)Q(x+1) \equiv (x+2)x(x-1)(x+1)Q(x),$$

այսինքն՝ $Q(x+1) = Q(x)$ բոլոր $x \in \mathbb{R}$ արժեքների համար: Այսպիսի պայմանի կարող է բավարարել միայն հաստատուն բազմանդամը՝ $Q(x) \equiv c$:

Այսպիսով՝ $P(x) = c(x^3 - x)$: Դժվար չէ համոզվել, որ այս տեսքի բոլոր բազմանդամները բավարարում են նույնությանը, ուստի խնդրի պատասխանն է՝ $P(x) = c(x^3 - x), \quad c \in \mathbb{R}$:

Խնդիր 2.3: Գտնել բոլոր $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ֆունկցիաները, որոնց համար

$$f(f(xy - x)) + f(x + y) = yf(x) + f(y)$$

կամայական x և y իրական թվերի համար:

Լուծում. $P(x,y)$-ով նշանակենք $f(f(xy-x))+f(x+y)=yf(x)+f(y)$ պնդումը:

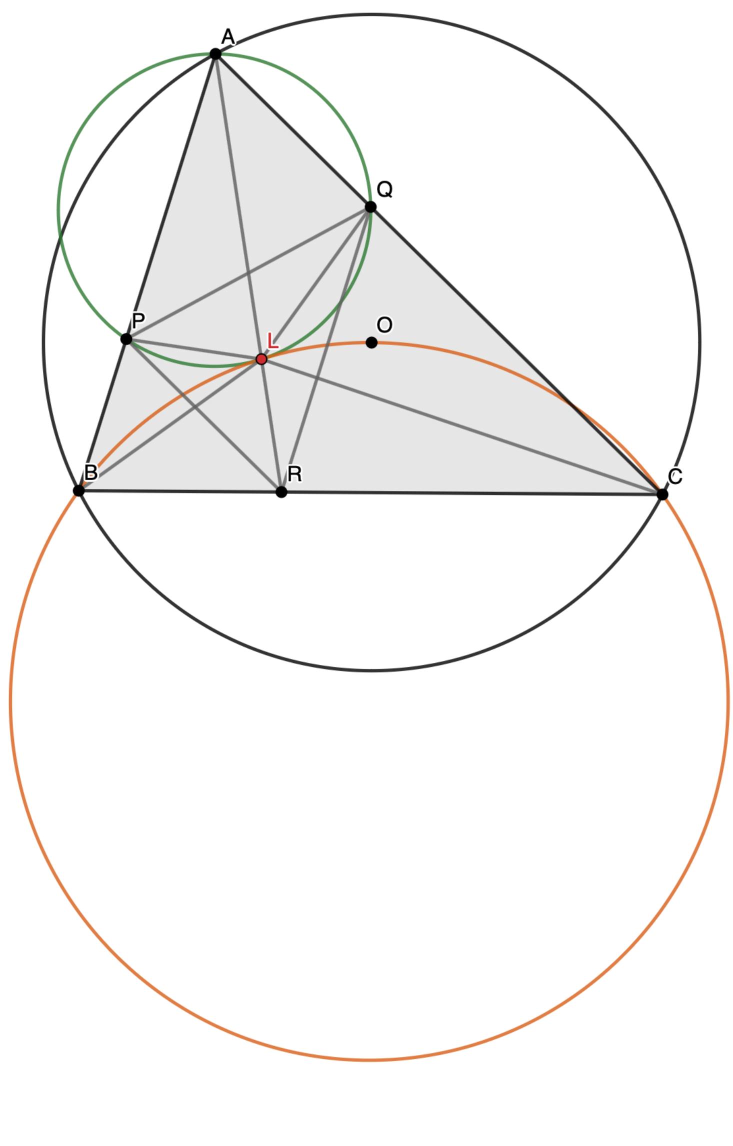
$P(0,0)$-ից կստանաք, որ $f(f(0))=0$, իսկ $P(0,1)$-ից՝ $f(0)=0$:

$P(x-1,0)$-ից կստանանք, որ $f(f(1-x))+f(x-1)=0$, իսկ $P(-1,x)$-ից հետևում է, որ $f(f(1-x))+f(x-1)=xf(-1)+f(x)$: Հանելով՝ կստանանք, որ $f(x)=ax \quad \forall x\in\mathbb{R}$, որտեղ $a=-f(-1)$:

Տեղադրելով սկզբնական հավասարության մեջ՝ կստանաք, որ $a^2(xy-x)+a(x+y)=axy+ay$, ուստի $(a^2-a)(xy-x)=0$: Այսպիսով $a=0$ կամ $a=1$: Լուծումներն են $f(x)=0, \quad \forall x\in\mathbb{R}$ և $f(x)=x, \quad \forall x\in\mathbb{R}$:

Խնդիր 2.4:. Դիցուք O-ն ABC սուրանկյուն եռանկյան արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է: Թող որ P և Q կետերը ընտրված լինեն համապատասխանաբար AB և AC կողմերի վրա այնպես, որ $BPQC$ քառանկյանը կարելի լինի արտագծել շրջանագիծ և տեղի ունենա $BP\cdot CQ$=$AP\cdot AQ$ հավասարությունը: Ապացուցել որ BOC և PAQ եռանկյունների արտագծած շրջանագծերն իրար շոշափում են:

Լուծում. Կառուցենք R կետը այնպես որ $RPAQ$-ն լինի զուգահեռագիծ: Օգտվելով $BP\cdot CQ=AP\cdot AQ$ պայմանից ստանում ենք, $\frac{BP}{PR}=\frac{BP}{AQ}=\frac{AP}{CQ}=\frac{QR}{QC}$: Մյուս կողմից $\angle BPR=\angle BAC=\angle RQC$, հետևաբար BPR և RQC եռանկյունները նման են: Այս եռանկյունների նմանությունից օգտվելով ստանում ենք $\angle BRP+\angle PRQ+\angle QRC=\angle RCQ+\angle RQC+\angle QRC=180°$, որտեղից R կետը գտնվում է BC կողմի վրա:



Այժմ վերցնենք AR ուղղի և $\triangle APQ$-ի արտագծած շրջանագծի հատման L կետը: Ցույց տանք որ որ $\triangle BOC$-ի և $\triangle PAQ$-ի արտագծած շրջանագծերն L կետում իրար շոշափում են: $BPQC$ քառանկյան ներգծյալ լինելուց ստանում ենք $\angle ABC = \angle PQA = \angle PLA$, ուստի B, P, L և R կետերը գտնվում են մի շրջանագծի վրա: Այստեղից $\angle BLR = \angle BPR = \angle BAC$, նույն ձևով C, Q, L և R կետերն էլ են ընկած մեկ շրջանագծի վրա և $\angle RLC = \angle BAC$, ուստի $\angle BLC = 2\angle BAC = \angle BOC$, հետևաբար B, L, O, C կետերը գտնվում են մեկ շրջանագծի վրա:

Մնում է տեսնել որ $\angle PLB = \angle PRB = \angle ACB = \angle LCR + \angle LCA = \angle LCR + \angle LRQ = \angle LCR + \angle LAP$, որտեղից ստանում ենք որ $\triangle BOC$-ի և $\triangle PAQ$-ի արտագծած շրջանագծերն իրար շոշափում են:

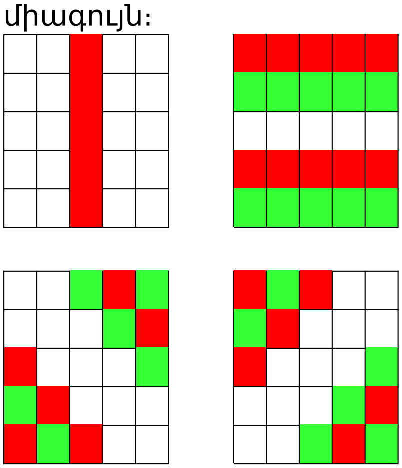
Խնդիր 2.5: $(2n+1)$x$(2n+1)$ քառակուսի աղյուսակի կենտրոնական վանդակը սև է, մյուսները՝ սպիտակ: Յուրաքանչյուր քայլի թույլատրվում է ընտրել որևէ տող, սյուն, կամ անկյունագիծ (անկյունագիծը կարող է չլինել գլխավոր) և ընտրված պատկերի բոլորը սև վանդակները դարձնել սպիտակ, իսկ սպիտակները՝ սև: Գտնե՛լ n-ի բոլոր բնական արժեքները, որոնց դեպքում հնարավոր է վերոնշյալ քայլերի օգնությամբ աղյուսակը դարձնել միագույն:

Լուծում. Այն բնական n-երը որոնց համար բավարարված են խնդրի պայմանները անվանենք հաղթական:

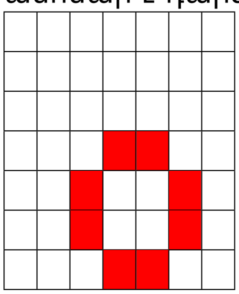
Պնդում 1. Եթե m-ը հաղթական է, ապա $\forall n \leq m$ ևս հաղթական է:
Ենթադրենք m-ը հաղթական է: n-ի համար, որտեղ $n \leq m$, դիտարկենք $(2m+1)$x$(2m+1)$ տախտակի (այսուհետ՝ սկզբնական տախտակ) այն $(2n+1)$x$(2n+1)$ հատվածը, որի կենտրոնական վանդակը համընկնում է սկզբնական տախտակի կենտրոնական վանդակի հետ (այսուհետ՝ ենթատախտակ): Դիտարկենք այն քայլերը որոնք կատարվել են սկզբնական տախտակը միագույն դարձնելու նպատակով: Քանի որ սկզբնական տախտակի յուրաքանչյուր տող, սյուն, անկյունագիծ հատում է ենթատախտակը դառնալով դրա տող, սյուն, անկյունագիծ (կամ առհասարակ չի հատում այն), կրկնելով սկզբնական տախտակը միագույն դարձնող քայլերը ենթատախտակի համապատասխան տողերի, սյուների և անկյունագծերի նկատմամբ այն կդարձնենք միագույն:

Դիտողություն 1. Եթե m-ը հաղթական չէ, ապա $\forall n \geq m$ ևս հաղթական չէ (անմիջապես բխում է պնդում 1-ից):

Պնդում 2. $n = 2$ հաղթական է:
Ստորև բերված օրինակում կարմիրով և կանաչով նշված են այն տողերը, սյուներն ու անկյունագծերը, որոնց հետ քայլ կատարելու դեպքում 5x5 տախտակը կդառնա միագույն:



Դիտողություն 2. $n = 1$ հաղթական է: (անմիջապես բխում է պնդում 2-ից և պնդում 1-ից):

Պնդում 3. $n = 3$ հաղթական չէ:
7x7 տախտակի մեջ դիտարկենք ստորև նշված ներկումը: Տախտակի կամայական տող, սյուն, անկյունագիծ հատում է կարմիրով նշված տարածքը կա՛մ 2, կա՛մ 0 կետում: Այսպիսով յուրաքանչյուր քայլի կարմիրով նշված տարածքում սև վանդակների զույգությունը կլինի նույնը: Սկզբում կարմիրով նշած տարածքում սև վանդակները կենտ քանակությամբ են (1 հատ), ուստի ամեն քայլի կարմիրով նշված տարածքում սև վանդակների քանակը կլինի կենտ, այն է` կարմիրով նշված տարածքում կլինեն և՛ սև, և՛ սպիտակ վանդակներ, ինչը նշանակում է որ աղյուսակն անհնար է դարձնել միագույն:

Դիտողություն 3. $\forall n \geq 3$ հաղթական չէ (անմիջապես բխում է պնդում 3-ից և դիտողություն 1-ից):

Պատասխան` $n = 1$ և $n = 2$

Յուրաքանչյուր խնդրի լուծման համար տրվում է 10 միավոր:

Օլիմպիադայի հանձնաժողովի նախագահ` Կ. Քեռյան