ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Դպրոցական մաթեմատիկական օլիմպիադա

6 ապրիլի, 2024 թ.

Խնդիր 1.1: Հայտնի է, որ $\frac{1}{\cos x} - \tan x = 2$: Գտնել $\frac{1}{\cos x} + \tan x$ արտահայտության արժեքը:

Լուծում. Դիտարկենք $(\frac{1}{\cos x} - \tan x)(\frac{1}{\cos x} + \tan x)$ արտահայտությունը.

$$(\frac{1}{\cos x} - \tan x)(\frac{1}{\cos x} + \tan x) = \frac{1-\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1+\sin x}{\cos x} = \frac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 :$$

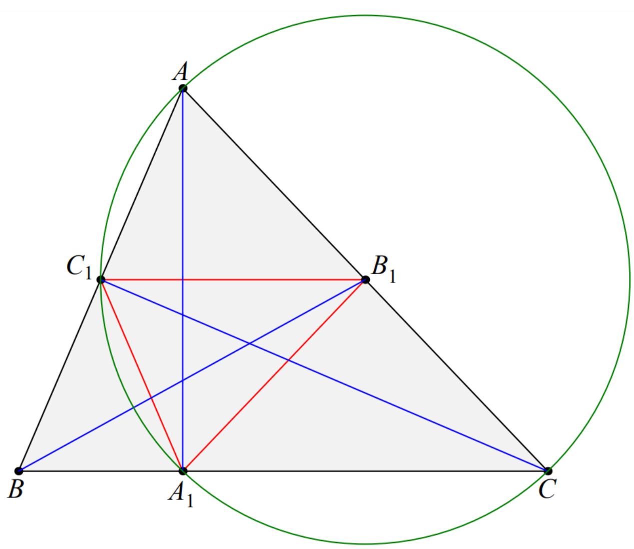
Այստեղից անմիջապես բխում է, որ $\frac{1}{\cos x} + \tan x = \frac{1}{2}$:

Խնդիր 1.2: ABC եռանկյան AB, BC և CA կողմերի վրա նշվել են համապատասխանաբար C_1, A_1, B_1 կետերը և տարվել են AA_1 բարձրությունը, BB_1 միջնագիծը և CC_1 կիսորդը: Հայտնի է, որ $A_1B_1C_1$ եռանկյունը հավասարակողմ է: Ապացուցել, որ $\triangle ABC$-ն նույնպես հավասարակողմ է:

Լուծում. $A_1B_1C_1$ հավասարակողմ եռանկյան կողմերի երկարությունները նշանակենք s-ով: B_1-ը AA_1C ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգի միջնակետն է, հետևաբար

$$B_1A = B_1C = B_1A_1 = s = B_1C_1,$$

և ուրեմն A, C_1, A_1 ու C կետերը գտնվում են B_1 կենտրոնով շրջանագծի վրա: Այդ շրջանագծում $\angle AC_1C$-ն նույնպես հենված է AC տրամագծի վրա, ուստի $\angle AC_1C = 90°$: Ստացվում է, որ CC_1 կիսորդը նաև բարձրություն է: Ուրեմն այն նաև միջնագիծ է և $AC = BC$: Մասնավորապես, C_1 կետը AB-ի միջնակետն է:



$\triangle AA_1B$-ն ուղղանկյուն եռանկյուն է, որի A_1C_1 միջնագիծը հավասար է AB ներքնաձիգի կեսին: Այստեղից

$$AB = 2A_1C_1 = 2s = AB_1 + B_1C = AC :$$

Այսպիսով՝ $AB = AC = BC$:

Խնդիր 1.3: Հայտնի է, որ 1 ավագ անդամի գործակից ունեցող 3-րդ աստիճանի $p(x)$ բազմանդամի համար $|p(1)| = |p(2)| = |p(3)| = |p(5)| = |p(6)| = |p(7)|$: Գտնել $p(0)$-ն:

Լուծում. Նշանակենք $a = |p(1)|$: Նկատենք, որ $q(x) = (p(x) - a)(p(x) + a)$ բազմանդամը 6-րդ աստիճանի է, ավագ անդամի գործակիցը 1 է և նրա արմատներն են 1,2,3,5,6,7 թվերը: Հետևաբար $q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-5)(x-6)(x-7) = (p(x) - a)(p(x) + a)$: Այսպիսով $p(x) - a$ և $p(x) + a$ հանդիսանում են $(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)(x-6)(x-7)$ արտադրյալի երեքական արտադրիչների արտադրյալի: Դժվար չէ նկատել, որ որպեսզի x^2 գործակիցը համընկնի, պետք է $p(x) - a$ և $p(x) + a$ բազմանդամներից մեկը լինի $(x-1)(x-5)(x-6)$, իսկ մյուսը՝ $(x-2)(x-3)(x-7)$: Հաշվի առնելով, որ $a = |p(1)| \geq 0$՝ կստանանք

$$p(x) + a = (x-1)(x-5)(x-6) = x^3 - 12x^2 + 41x - 30,$$

$$p(x) - a = (x-2)(x-3)(x-7) = x^3 - 12x^2 + 41x - 42 :$$

Ուստի $2a = (p(x) + a) - (p(x) - a) = 12$, որտեղից $a = 6$ և $p(0) = -36$:

Խնդիր 1.4: 12 թենիսիստ մասնակցեցին թենիսի մրցաշարի, որի ընթացքում ցանկացած երկու թենիսիստ խաղացին ճիշտ 1 անգամ: Յուրաքանչյուր խաղ ավարտվել է մասնակիցներից մեկի հաղթանակով և մյուսի պարտությամբ: Հաղթանակի համար մասնակիցը ստացել է 1 միավոր, իսկ պարտության համար՝ 0: Դիցուք $B_1, B_2, \ldots, B_{12}$-ը թենիսիստների վաստակած միավորներն են: Գտնել $B_1^3 + B_2^3 + \cdots + B_{12}^3$ արտահայտության հնարավոր մեծագույն արժեքը:

Լուծում. Դիցուք $T_1, T_2, \ldots T_{12}$ թենիսիստներն են: Առանց ընդհանրությունը խախտելու համարենք, որ $B_1 \geq B_2 \geq \cdots \geq B_{12}$:

Պնդում. $B_1^3 + B_2^3 + \cdots + B_{12}^3$ արտահայտությունն ընդունում է իր մեծագույն արժեքը այն դեպքում, երբ $\forall i < j$, T_i-ն հաղթել է T_j-ին:

Ապացույց. Կատարենք հակասող ենթադրություն: Ենթադրենք՝ գոյություն ունի $i < j$ այնպես, որ T_i-ն պարտվել է T_j-ին: Ցույց տանք, որ $B_1^3 + B_2^3 + \cdots + B_{12}^3$ արտահայտությունը կարելի է մեծացնել:

Եթե փոխենք i-րդ և j-րդ մասնակիցների միջև եղած արդյունքը, ապա B_i-ն կմեծանա 1-ով, B_j-ն կփոքրանա 1-ով, և մնացածների միավորները կմնան նույնը: Այդ դեպքում $B_1^3 + B_2^3 + \cdots + B_{12}^3$ արտահայտությունը կդառնա $B_1^3 + \cdots + (B_i + 1)^3 + \cdots + (B_j - 1)^3 + \cdots + B_{12}^3$:

Այսինքն, պետք է ցույց տալ, որ $B_i^3 + B_j^3 < (B_i + 1)^3 + (B_j - 1)^3$: Բացելով փակագծերը և կատարելով որոշակի խմբավորում, կստանանք՝

$$0 < 3B_i^2 - 3B_j^2 + 3B_i + 3B_j,$$

որը ակնհայտորեն ճիշտ է, քանի որ $1 \leq B_j \leq B_i$:

Պնդումից անմիջապես հետևում է, որ i-րդ մասնակիցը հաղթել է միայն իրենից ցածր միավոր ունեցողներին՝ $T_{i+1}, \ldots, T_{12}$-ին: Ուստի $B_1 = 11$, $B_2 = 10, \ldots, B_{12} = 0$: Այսպիսով՝ $B_1^3 + B_2^3 + \cdots + B_{12}^3 \leq 11^3 + 10^3 + \cdots + 0^3 = 4356$:

Խնդիր 1.5: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ թվային հաջորդականությունը սահմանված է հետևյալ կերպ՝ $a_1 = a_2 = 1, a_3 = 75$ և

$$a_{n+1} = \frac{2024 + a_n a_{n-1}}{a_{n-2}}, \quad n \geq 3 :$$

Ապացուցել, որ հաջորդականության բոլոր անդամները բնական թվեր են:

Լուծում. Հաջորդականության սահմանումից ունենք, որ

$$a_{n+1} a_{n-2} = 2024 + a_n a_{n-1}, \quad n \geq 3 :$$

n-ի փոխարեն $n-1$ տեղադրելով կստանանք՝

$$a_n a_{n-3} = 2024 + a_{n-1}a_{n-2}, \quad n \geq 4:$$

Իրարից հանելով այս երկու հավասարությունները՝ ստանում ենք.

$$a_{n+1}a_{n-2} - a_n a_{n-3} = a_n a_{n-1} - a_{n-1}a_{n-2},$$

կամ որ նույնն է՝

$$a_{n-2}(a_{n+1} + a_{n-1}) = a_n(a_{n-1} + a_{n-3}):$$

Հաջորդականության սահմանումից անմիջապես բխում է, որ հաջորդականության անդամները 0 չեն կարող դառնալ, ուստի վերջին հավասարությունը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_{n-1} + a_{n-3}}{a_{n-2}}, \quad n \geq 4:$$

Երբ n-ը զույգ է, ստանում ենք՝

$$\frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_{n-1} + a_{n-3}}{a_{n-2}} = \cdots = \frac{a_3 + a_1}{a_2} = \frac{75+1}{1} = 76:$$

Երբ n-ը կենտ է, ստանում ենք՝

$$\frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_{n-1} + a_{n-3}}{a_{n-2}} = \cdots = \frac{a_4 + a_2}{a_3} = \frac{2099+1}{75} = 28:$$

Այսպիսով՝ $a_{n+1} = \begin{cases} 76a_n - a_{n-1}, & \text{երբ } n\text{-ը կենտ է;} \\ 28a_n - a_{n-1}, & \text{երբ } n\text{-ը զույգ է:} \end{cases}$

Ի վերջո կիրառելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը՝ հեշտությամբ ցույց է տրվում, որ a_n-ը բնական է բոլոր n-երի համար:

Յուրաքանչյուր խնդրի լուծման համար տրվում է 10 միավոր:

Օլիմպիադայի հանձնաժողովի նախագահ՝ Կ. Քեռյան